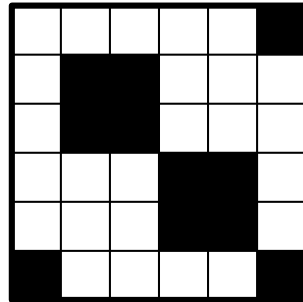


7 класс. Решения задач

1. Покрасьте 11 клеток квадрата 6×6 в чёрный цвет так, чтобы с каждой покрашенной клеткой по стороне соседствовали ровно две непокрашенных.

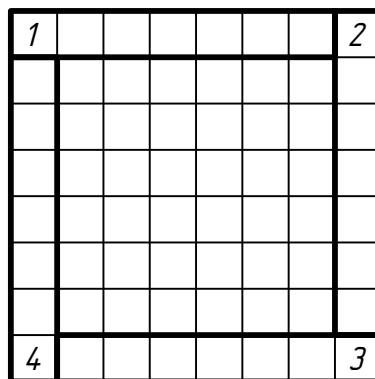
РЕШЕНИЕ. Например, так.



(Разумеется, это не единственный возможный вариант!)

2. Миша и Дима играют на клетчатой доске 8×8 . Они ходят по очереди, начинает Миша. Он своим ходом рисует галочку в любой свободной клетке. Ответным ходом Дима кладёт на доску прямоугольник 1×7 , закрывая галочку. Прямоугольники не должны перекрываться и вылезать за пределы доски. Если Дима не может сделать ход (и только в этом случае), он платит Мише тысячу рублей, после чего ходит Миша. Игра заканчивается, когда Миша не может сделать ход. Может ли Миша играть так, чтобы наверняка заработать не менее 36 тысяч рублей? (Свободной считаются клетка, которая не отмечена галочкой и не покрыта прямоугольником 1×7 .)

РЕШЕНИЕ. Да, может. Первым ходом Мише нужно сделать ход в одну из угловых клеток (см. рисунок).



Тогда Дима своим ходом вынужден будет положить прямоугольник 1×7 , закрывающий эту галочку, так, как показано на рисунке (с точностью до поворота на 90°). Дальше Миша будет делать ходы в клетки, обозначенные цифрами 2, 3, 4; всякий раз Дима вынужден будет класть прямоугольник так, как показано на рисунке. Теперь Миша должен в любом порядке делать ходы во все 36 свободных клеток. Каждый раз он будет зарабатывать тысячу рублей.

3. Прямоугольник разбит на 9 меньших прямоугольников. Периметры четырёх из них указаны на рисунке. Найдите периметр прямоугольника под знаком вопроса.

15		?
16		
17		18

РЕШЕНИЕ. *I способ.* Все три прямоугольника в левом столбце имеют одинаковые длины горизонтальных сторон. Периметр каждого из них равен удвоенной сумме длин его горизонтальной и вертикальной сторон. При этом периметры увеличиваются на единицу сверху вниз, значит, длины вертикальных сторон увеличиваются на $\frac{1}{2}$ сверху вниз. Аналогично, периметр каждого из трёх прямоугольников в правом столбце равен удвоенной сумме длин его вертикальной и горизонтальной сторон. Длины их горизонтальных сторон равны, а длины вертикальных такие же, как у прямоугольников в левом столбце, то есть увеличиваются на $\frac{1}{2}$ сверху вниз. Значит, периметры прямоугольников в правом столбце будут убывать на 1 снизу вверх, поэтому периметр прямоугольника под знаком вопроса равен $18 - 2 = 16$.

II способ. Обозначим длины сторон некоторых прямоугольников так, как указано на рисунке.

	<i>I</i>		<i>III</i>	
<i>II</i>	15		?	<i>II</i>
	16			
<i>IV</i>	17		18	<i>IV</i>
	<i>I</i>		<i>III</i>	

Тогда периметры левого верхнего, левого нижнего, правого верхнего и правого нижнего прямоугольников равны, соответственно, $2(I + II)$, $2(I + IV)$, $2(II + III)$ и $2(III + IV)$. Значит, сумма периметров левого верхнего и правого нижнего прямоугольников равна сумме периметров правого верхнего и левого нижнего прямоугольников и равна $2(I + II + III + IV)$. Но сумма периметров левого верхнего и правого нижнего прямоугольников равна $15 + 18 = 33$, поэтому периметр правого верхнего прямоугольника (под знаком вопроса) равен разности 33 и периметра левого нижнего прямоугольника, то есть $33 - 17 = 16$.

III способ. Обозначим стороны некоторых прямоугольников так, как указано на рисунке.

	<i>x</i>		<i>y</i>	
<i>a</i>	15		?	
	16			
<i>b</i>	17		18	

Периметр левого верхнего прямоугольника равен $2a + 2x = 15$, левого нижнего — $2b + 2x = 17$, правого нижнего — $2b + 2y = 18$. Вычитая из третьего равенства второе, получим, что $2y - 2x = 1$. Значит, периметр прямоугольника под знаком вопроса равен

$$2a + 2y = (2a + 2x) + (2y - 2x) = 15 + 1 = 16.$$

4. Известно, что a , b и c — различные составные натуральные числа, но каждое из них не делится ни на одно из натуральных чисел от 2 до 100 включительно. Докажите, что если произведение abc этих чисел — наименьшее из возможных, то оно является кубом натурального числа.

РЕШЕНИЕ. Без ограничения общности можно считать, что $a < b < c$. Из условия задачи следует, что ни одно из трёх рассматриваемых чисел не имеет простых делителей из первой сотни натуральных чисел. Кроме того, поскольку эти числа составные, то у каждого из них есть не менее двух простых делителей, больших ста. Первые три простых числа во второй сотне — это 101, 103 и 107. Следовательно, $a = 101^2$ является наименьшим числом, обладающим указанными свойствами, а $b = 101 \cdot 103$ — следующим за ним. Так как $103^2 = 10609 < 101 \cdot 107 = 10807$, то $c = 103^2$. Таким образом, $abc = 101^2 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 103^2 = (101 \cdot 103)^3$, что и требовалось доказать.

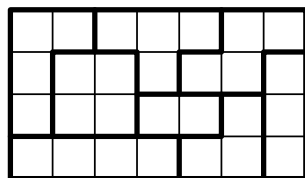
5. Какое наибольшее количество трёхзначных чисел можно выписать на доску так, чтобы любые два выписанных числа различались хотя бы в двух разрядах?

РЕШЕНИЕ. Разобьём все трёхзначные числа на 90 групп по 10 чисел в каждой: от 100 до 109, от 110 до 119, ..., от 990 до 999. Понятно, что из каждой группы нельзя выписать больше одного числа, ведь у любых двух чисел из одной группы совпадают и разряды сотен, и разряды десятков. Значит, всего на доске выписано не больше 90 чисел. Покажем, как выписать ровно 90. Для этого из каждой группы будем выписывать число, разряд единиц которого равен последней цифре суммы разрядов сотен и десятков. (Например, из группы от 750 до 759 будет выписано число 752, потому что $7 + 5 = 12$.) Рассмотрим два произвольных числа, выписанных на доске. Если у них совпадают разряды сотен, то отличаются и разряды десятков (очевидно), и разряды единиц (так как сумма разрядов сотен и десятков у любых двух таких чисел оканчивается на разные цифры). Если же разряды сотен у двух выписанных чисел различны, а разряды десятков совпадают, то разряды единиц опять различны (по аналогичным причинам). Разумеется, это не единственный возможный пример!

8 класс. Решения задач

1. Разрежьте прямоугольник 4×7 на 8 различных по форме частей, отличных от квадрата 1×1 .

РЕШЕНИЕ. Например, так.



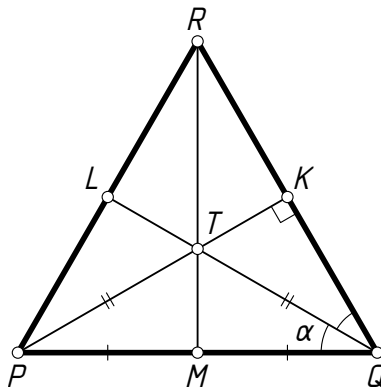
(Разумеется, это не единственно возможный вариант!)

2. При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ натурально и оканчивается тремя нулями?

РЕШЕНИЕ. Понятно, что $n \geq 5$. Чтобы число оканчивалось тремя нулями, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 125 и на 8. Из четырёх последовательных натуральных чисел не более одного делится на 5, поэтому нужно, чтобы число, кратное пяти, было среди них и делилось на 125. С другой стороны, из любых четырёх последовательных натуральных чисел ровно одно делится на 4 и ещё ровно одно делится на 2 (но не на 4), поэтому их произведение всегда делится на 8. Ясно, что наименьшее возможное n — то, при котором $n-1 = 125$, то есть $n = 126$.

3. В треугольнике PQR высота PK , биссектриса QL и медиана RM пересекаются в одной точке T . Известно, что $PT = QT$. Докажите, что треугольник PQR — равносторонний.

РЕШЕНИЕ. Обозначим угол PQT через α (см. рисунок).



Треугольники PTM и QTM равны по трём сторонам, поэтому угол QPT тоже равен α . Из прямоугольного треугольника PQK мы видим, что $\alpha = 30^\circ$. С другой стороны, TM — медиана в равнобедренном треугольнике PQT , поэтому она является в нём ещё и высотой. Из прямоугольного треугольника RQM мы теперь заключаем, что угол QRM тоже равен 30° . Значит, оба угла PTQ и RTQ равны 120° , так что треугольники PTQ и RTQ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $PT = RT$, откуда в равнобедренном треугольнике PRT углы PRT и RPT при основании равны. Таким образом, $\angle PRQ = \angle PRT + \angle TRQ = \angle RPT + \angle TPQ = \angle RPQ$. Значит, оба этих угла равны $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$, и треугольник PQR — правильный.

4. В первую минуту Матвей написал на доске число 2021, а во вторую — число 2022. Каждую минуту он записывает на доске ещё одно число, равное сумме последнего записанного на доске числа, умноженного на 2021^{2022} , и предпоследнего записанного на доске числа. Чему равен наибольший общий делитель чисел, записанных Матвеем на доске в 2021-ю и 2022-ю минуты?

РЕШЕНИЕ. Обозначим число, записанное Матвеем на доске в k -ю минуту, через a_k . Тогда $a_1 = 2021$, $a_2 = 2022$ и $a_k = 2021^{2022}a_{k-1} + a_{k-2}$ для любого $k \geq 3$. Если d — какой-то общий делитель чисел a_k и a_{k-1} (для какого-нибудь $k \geq 3$), то на d делится и $a_{k-2} = a_k - 2021^{2022}a_{k-1}$. Аналогично, на d будут делиться все числа a_{k-3} , a_{k-4} , ..., a_2 , a_1 . Но числа a_1 и a_2 взаимно просты, поэтому и НОД чисел a_{2021} и a_{2022} равен 1.

5. Саша и Алина играют в игру. Изначально перед ними на столе лежит по одной купюре каждого из достоинств 1, 2, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 и 5000 пиастров. (Купюр другого достоинства в этой стране не бывает.) Саша и Алина ходят по очереди, начинает Саша. За один ход разрешается взять со стола любую купюру, разменять её в банке на любые купюры меньшего достоинства на ту же сумму и положить все эти купюры на стол вместо взятой. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Есть ли у Саши или у Алины способ выиграть, как бы ни играл соперник?

РЕШЕНИЕ. У Саши есть выигрышная стратегия. Первым ходом Саша разменивает купюру в 5000 пиастров так, чтобы получилось по одной купюре в 2, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000 пиастров, а остальную сумму набирает купюрами по 1 пиастру. После этого купюр каждого достоинства, большего 1, становится чётное число, и Саша может каждый раз повторять ход Алины, восстанавливая чётность. Поскольку у Саши будет ход, а число ходов, очевидно, конечно, Алина в конце концов не сможет сделать ход.